Godel Và Nhận Thức Luận

• *Ngô Văn Quế*

Châm ngôn bản thể học của Socrates là "Nhân hữu tự tri." "Ta phải biết ta" không có nghĩa theo ý của Khổng Tử rằng con người sống phải nhận định ra thân phận của mình, địa vị của mình trong xã hội, gia đình. Socrates muốn nói con người sống phải đi tìm hiểu bản thể của mình: vũ trụ, thiên nhiên. Chỉ từ sự tìm hiểu đó, con người mới tạo dựng được cho mình một thế giới chính đáng nhân sinh tổ quốc, xã hội.....

Cái khả năng trực giác đi tìm hiểu đó là đặc tính của con người - một loài sinh vật trong các loài sinh vật. A.Einstein đã từng viết: Đức tính cao cả của con người - làm người - là biết xúc động, hồn nhiên hiếu kỳ trước cái huyền bí của vũ trụ và sự sống.

Nhưng thế nào là biết, là tìm hiểu biết? Đó là vấn đề của một ngành triết học: Nhận Thức Luận Học (Epistemology). Một vấn đề tế nhị sâu xa ngoài những nhận định thông thường của chúng ta mỗi ngày. Chính giờ đây, các triết gia xưa và nay, trên thế giới chưa có một khái niệm đồng nhất về sự hiểu biết (What is Knowledge?). Có phải chăng sự hiểu biết là thuộc về "huệ năng", "nghệ thuật thi ca", thuộc về "tín ngưỡng" của mỗi người? Tuy nhiên các triết gia, các khảo luận gia đều đồng ý một điều này rằng chúng ta nếu có trực giác tri thức một sự việc gì, là chỉ sau khi đã nghiệm thức, phân tích nó để lại rồi nhìn tổng quát lại nó. Tôi muốn nói: nhìn tổng quát lại một sự việc, là biết đặt lại sự việc đó trong một phạm trù phổ biến, với những tiền đề cấu trúc phù hợp rộng rãi để suy luận ra lại những đặc tính, trạng thái của sự việc mà chúng ta nghiệm thức, khảo xát thấy. Tỉ như chúng ta nói: "Trái đất là một hành tinh", một phần nào chúng ta đã giảm bớt cái huyền mặc của chúng ta trước vũ trụ, vì chúng ta đã "biết" nhận định rằng trái đất chỉ là một hành tinh trong hằng hà sa số của những hành tinh trong vũ trụ, trái đất là một trong những hành tinh của mặt trời.

Ngô Văn Quế là giáo sư toán học tại University of Montreal, Quebec.

TOÁN HỌC VÀ LOGIC QUI ẤN CỔ ĐIỂN CƠ BẢN (MATHEMATICS AND CLASSICAL ELEMENTARY FORMAL LOGIC)

Chính yếu của sự Hiểu Biết là khả năng nhìn đơn thuần tổng quát và khả năng suy luận. Thế nào là nhìn đơn thuần tổng quát? Đó là nhìn vào một sự việc, quên đi cái bản thể hỗn tạp của nó và chọn nhìn thấy một khía cạnh đặc thù rồi đơn thuần khái niệm hóa. Đối với Galileo thì cả bầu trời vằng vặc, hỗn độn với muôn ngàn tinh tú là một quyển vở vô tận mà "Thượng Đế" đã đặt lên trên những điểm, những đường thẳng và những vòng tròn.... Một điểm? nó không có hình hài, không có thực tại! Một đường thẳng? như "con đường thẳng" trước mặt chúng ta kia, thật nó là một con đường hỗn tạp với những hòn sỏi, những cỏ vụn! Và trái đất nữa với những sông núi, vực thẳm và biển rộng! Nhưng mỗi khi chúng ta nghĩ tới quả địa cầu là chúng ta nghĩ tới một quả cầu tròn trĩnh và trơn tru. Hai nghìn năm trước Công Nguyên, người Ấn Độ, người Ai Cập đã biết trong tư duy của con người bắt buộc phải có những khái niệm trừu tượng siêu hình như khái niệm của một điểm, của một đường thẳng .... Triết gia, toán gia Hy Lạp Euclid, hơn ba trăm năm trước Công Nguyên, đã thấy cần phải đặt rõ cơ sở của Hình Học - hình học Euclid - vì hình học là nền tảng trong tư tưởng của con người. Khi lập nhà trường Akademeia, Plato không nói gì hơn: "Ai đến viện Akademeia đều phải biết Hình Học".

Pythagoras sống trước Euclid hơn hai thế kỷ còn xác nhận nữa rằng: trong tư tưởng con người, ngoài hình học, chúng ta còn cần phải có những khái niệm về Số Học. Nói một cách khác, đó là toàn thể Toán học như chúng ta hiểu ngày nay. Sâu xa trong mọi ngành Toán học, là một điều giản dị cơ bản: sự suy luận, hay rõ hơn sự Lập Luận Logic. Theo Aristotle, lập luận logic là lập luận trùng ngôn (syllogism hay là tautology). Mọi sinh vật đều phải biết lập luận trùng ngôn. Vì đó là luật sống còn! Một con thú hoang muốn sống, phải biết phân biệt "bạn và thù", tức là phân biệt "phải và trái", "A hay không A". Con thú hoang còn biết nữa: Không ăn thì đói, đói thì chết và biết lập luận Logic ngược lại: Sống (không chết) ......không đói ......ăn để nó tự động đi tìm ăn!

Lấy đây nữa một tỉ dụ của sự thực nghiệm logic trong cuộc sống mỗi ngày. Có những người con gái mới lớn lên đã biết nói như thế này để khỏi buồn người bạn: "Nếu ngày mai biển cạn, thì em sẽ không yêu anh". Nhưng biển không cạn, thì cũng tùy anh muốn kết luận sao cũng được: em sẽ yêu anh hay là em sẽ không yêu anh! Nếu cô gái thật yêu, cô gái đã nói: "Dù biển có cạn, em vẫn yêu anh." Theo logic cơ bản, ở đây cô đã nói (Biển cạn hay không cạn).......(Em yêu anh). Cái giả thiết: "Biển cạn hay không cạn", bao giờ cũng đúng, thì kết luận bắt buộc phải đúng: "Em yêu anh!" cô gái đã xử dụng cái lý "Modus Ponens" của logic.

HỆ THỐNG TOÁN AXIOMATIC VÀ BÀN CỜ TÂY

Vào thời Aristotle viết *Metaphysics* bàn về Logic người Hy Lạp đã truyền tụng cái nghịch lý luận đề (paradox) của Epimenides (The Liar Paradox): "Tôi nói dối!" Đó là một nghịch lý luận đề. Thật vậy, nếu Epimenides nói dối, khi chính ông nói: "Tôi nói dối!", thì là ông nói thật chứ! Ngược lại, nếu ông nói thật rằng ông nói dối, thì đã nói thật, ông có nói dối đâu!

Như vậy, lập luận trùng ngôn, hay là logic cơ bản, có thể đưa đến những nghịch lý, những mâu thuẫn! Vừa chứng minh rằng A đúng vừa chứng minh rằng A sai! Nhưng sự thật là nghịch lý luận đề của Epimenides là áp dụng logic cơ bản vào Ngữ Nghĩa Luận Học (semantics). Nó không khác gì nghịch ngôn của Công Tôn Long, triết gia trung Hoa, thời Chiến Quốc: "Con ngựa trắng không phải là con ngựa" (Bạch mã phi mã).

Cái nghịch lý nằm trong Ngữ Nghĩa, chứ không phải nằm trong Logic cơ bản. Logic cơ bản không có mâu thuẫn (the consistency of elemantary Logic). Viết ra một câu, chúng ta có thể máy móc xác định câu đó là một trùng ngôn (tautology) hay không. Nhưng thường, mỗi khi chúng ta lập luận trùng ngôn, là chúng ta áp dụng Logic cơ bản vào trong một phạm trù rõ rệt. Đối với Toán gia, là áp dụng Logic cơ bản hay suy luận theo Logic cơ bản trong một hệ thống Toán Axiomatic.

Một tỉ dụ dễ hiểu của hệ thống Toán Axiomatic là Bàn Cờ Tây (the game of Chess). Trong hệ thống toán này, ta chỉ có một bàn cờ, gồm 64 ô vuông, và 32 quân cờ với những qui ước (axioms) rõ rệt về luận chơi cờ. Áp dụng Logic cơ bản, một máy điện tử (computer) có thể chứng minh một cách máy móc: "Nếu trên bàn cờ, chỉ còn hai ông vua và một xe trắng, đến lượt trắng đi, quân trắng được cờ". Dĩ nhiên, câu trên có nghĩa là ở mọi thế cờ, ta không thể bày nước đi cho vua đen thoát nước bí.

Hơn nữa, với một máy điện tử chỉ biết đọc 0 và 1, chỉ biết viết ra 0 hay 1 - máy Turing, máy Logic cơ bản của toán gia Turing - chắc chỉ gần đây thôi, chúng ta có thể viết một chương trình , hay rõ hơn một Algorithm, cho chiếc máy biết đánh cờ, đánh được cả những nhà vô địch cờ thế giới!

Để hiểu rõ hơn cái liên hạn qui chiếu máy móc (finitary inference) của logic cơ bản, chúng ta còn có thể, theo Godel, cho mỗi quân cờ một số hiệu - số Godel - tỉ dụ 32 quân cờ là 32 số nguyên tố (prime numbers): 2,3,5,7, ; cho mỗi ô cờ một số hiệu: 64 ô từ 1 tới 64. Tỉ dụ, nếu vua trắng là 2, vua đen là 5, một xe trắng là 7, con số $2800 = 2^4.5^2.7$ có nghĩa là ta có thế cờ: vua trắng ở ô số 4, vua đen ở ô số 2 và xe trắng ở ô số 1. Rồi mỗi lần đi quân là một số hiệu, lần lượt theo các số nguyên tố: 2 là lượt đi quân đầu tiên, 3 là lượt đi quân thứ nhì, như vậy nếu ta viết số $(7^3)^2$, tức lượt đi quân thứ bốn, quân đen đã đi quân số hiệu 3 vào ô số 2. Như thế, theo Godel, chơi cờ, hay rõ hơn tìm ra những của hệ thống Toán Axiomatic của Bàn Cờ Tây - những định lý ở đây là những thế cờ có thể có trong một cuộc chơi cờ - chúng ta chỉ cần làm những bài tính cộng, trừ, nhân, chia của Số Học (Arithmetics). Godel đã chứng minh chúng ta có thể Số Học Hóa (Arithmetisation) Logic cơ bản trong hệ thống toán Axiomatic của bàn cờ!

TỪ EUCLID TỚI HILBERT

Nói về những nhận định của con người, như những cảm nhận của chúng ta về "không gian", chắc chắn ngay buổi đầu, con người đã có những cảm nhận thông thường, tự nhiên về những "hình thể của hình học" (geometric forms); tỉ dụ như mặt trăng tròn, mặt trăng khuyết.... Nhưng những cảm nhận đó không đủ để chúng ta tạo dựng một không gian giản dị, đơn thuần thích ứng cho cuộc sống, như xây một nóc nhà, đóng một cái bàn, một cái ghế... Chúng ta còn cần một số khái niệm trừu tượng để suy luận ra lại không gian, trừu xuất được cái hồng hoang bí quẩn của thiên nhiên, tránh những sai lầm đổ vỡ dẫn tới bởi những linh cảm không chính xác. Đó là nguồn gốc của toán Axiomatic.

Thật vậy, quyển sách đầu tiên về một hệ thống toán Axiomatic đã là quyển Yếu Tố Luận của Euclid (The elements of Euclid) - cuối thế kỷ thứ 4 trước Công Nguyên. Quyển Yếu Tố Luận này mãi mãi là quyển sách "gối đầu" của Toán Học. Một tỉ dụ cổ điển của sự lập luận trùng ngôn từ một số tiền đề rõ rệt. Trong đó, Euclid đã đặt ra một số tiền đề (the postulats of Euclid): theo Euclid, một số là từ những nhận xét thực nghiệm hàng ngày, một số từ những phản tỉnh trừu tượng. Rồi từ những tiền đề đó, Euclid suy luận Logic ra tất cả hình học cơ bản Euclid (Elementary geometry of Euclid), hình học mà chúng ta ai cũng đã học qua trong chương trình phổ thông trung học.

Đặt rõ những tiền đề cho một hệ thống toán Axiomatic như Hình Học Cơ Bản Euclid, là đặt một số tiền đề tối thiểu và cần thiết. Tối thiểu, có nghĩa là không một tiền đề nào lại là một "định lý" (theorem) của những tiền đề khác, hay nói rõ hơn, chúng ta không thể lập luận trùng ngôn từ những tiền đề khác mà suy luận ra nó. Cần thiết, có nghĩa là đủ để chúng ta từ những tiền đề ấy thôi suy luận logic ra tất cả một và duy nhất một Hình Học Cơ Bản Euclid, mà chúng ta ai ai cũng nhất trí đồng hiểu như nhau. Dĩ nhiên, đặt rõ và nhận định rõ những Tiền Đề Tối Thiểu và Cần Thiết cho một hệ thống Toán Axiomatic, như Hình Học Cơ Bản Euclid, là cả một lịch trình phát triển phản tỉnh suy luận. tỉ dụ như Tiền Đề của Đường Song Song (the 5th Postulat of Euclid): "Từ một điểm A, ở ngoài đường thẳng D, chúng ta kẻ được một và chỉ kẻ được một đường D', song song với đường D - song song, có nghĩa là hai đường D và D' không gặp nhau ở một điểm nào".

Người ta đã phải chờ đến thế kỷ thứ 19, nhờ những toán gia Bolyai, Lobacevski, Riemann mới nhận định rõ đó là một tiền đề bắt buộc phải có cho Hình Học Cơ Bản Euclid! Thật vậy, chẳng hạn theo Riemann, chúng ta có thể coi trên diện thế của quả cầu (the sphere of Riemann) những đường vòng lớn (the great circles) là những đường thẳng, và chúng ta cũng có ở đây một hình học - mà thật đây mới là hình học mỗi ngày của chúng ta, sống trên quả địa cầu, coi như là một quả cầu trơn tru và tròn trĩnh. Trong hình học này, hai đường thẳng bao giờ cũng gặp nhau. Chúng ta phải chờ đến đầu thế kỷ thứ 20, toán gia D.Hilbert hoàn chỉnh, tu bổ Yếu Tố Luận của Euclid, nghĩa là mới đặt rõ từ đấy những tiền đề Tối Thiểu và Cần Thiết của Hình Học Cơ Bản Euclid!

NHỮNG ĐỊNH LÝ CỦA GODEL

Những logic luận gia ở đầu thế kỷ 20 còn đi xa hơn nữa trong khảo luận về Cơ Sở của Toán Học (the foundation of Mathematics). Họ xác định rằng tất cả Toán Học là nằm trong Hệ Thống Toán Axiomatic duy nhất: Số Học (Arithmetics). Trong phạm trù của những tập hợp (the category of sets), với những khái niệm thông thường: phần tử, phần hợp, biến hàm... (elements, subsets, transformations...), chúng ta chỉ cần có một tập hợp N, với phần tử 1, và một biến hàm:

s: N - > N : x -> s(x)

thích ứng với ba tiền đề sau đây của Peano (the axioms of Peano):

1. $s(x) \neq 1$
2. $((s(x) = s(y)) \Rightarrow (x = y)$
3. <u>Phép quy nạp</u> (axiom of induction): A là phần hợp của $N, A \subset N$, với hai đặc tính sau đây: i - 1 là phần tử của A ii - nếu x là phần tử của A, thì s (x) cũng là phần tử của A.

Nếu như vậy, A là tất cả N: A = N.

Đối với toán gia, tập hợp N này là tập hợp của những số tự nhiên, N = { 1,2,3,4,...}, tập hợp của Số Học mà ai cũng biết. Thật vậy, chỉ cần ba tiền đề trên, chúng ta có thể xác định trên N những biến thức: cộng, trừ, nhân, chia. (s(x) = x+1). Rồi từ tập hợp N của những số tự nhiên, ta suy luận định nghĩa những số hữu tỉ, những số thiệt (rational and natural numbers), để xây dựng tất cả lâu đài Toán Học: Hình Học Euclid, hình học Bolyai-Lobacevski, hình học Riemann đều nằm trong hệ thống toán Axiomatic Số Học.

Căn bản là như vậy! Câu hỏi tự nhiên tới là: chúng ta chỉ cần lập luận trùng ngôn, liên hạn qui chiếu máy móc từ Số Học để tìm ra được hay không tất cả những sự thật của Toán Học? Nói một cách khác, muốn tìm những sự thật đó, chúng ta chỉ cần thôi chẳng viết ra những chương trình - những algorithms - cho máy điện tử, máy Turing, suy luận hộ chúng ta? Hay nói một cách khác nữa, như Godel cho chúng ta biết, chúng ta có thể Số Học Hóa lập luận logic trong Số Học, chúng ta muốn tìm những sự thật của Toán Học, chúng ta chỉ cần biết làm tính cộng, trừ, nhân chia mà thôi hay sao? Đó là ý đồ của B.A.Russell - A.N.Whitehead khi viết Principia Mathematica! Đó cũng là câu hỏi sâu xa của D.Hilbert. Một đại toán gia của thế kỷ 20, H.Weyl đã vội trả lời: "chỉ có logic luận gia trong vọng tưởng mới dám nghĩ rằng Toán Học chỉ là lập luận logic" (Mathematics is no more based on logic than the utopia built by the logician!)

Câu hỏi của D.Hilbert thật ra là câu hỏi siêu toán (meta-mathematics) này: "chúng ta có thể hay không liên hạn suy luận logic trong hệ thống Toán Axiomatic Số Học chứng minh chính nó, Số Học không có mâu thuẫn (the consistency of Arithmetics)".

Năm 1930, toán gia Kurt Godel đã trả lời câu hỏi của D.Hilbert bằng hai định lý sau đây:

Định lý I: "Số Học có mâu thuẫn hay không" là câu hỏi bất khả giải định (undecidable) bằng liên hạn lập luận logic trong chính hệ thống toán axiomatic của Số Học.

Định lý II: Sự Bất Toàn của hệ thống Toán Axiomatic (The incompleteneess of Axiomatic systems).

Trong bất cứ một hệ thống Toán Axiomatic nào, bao gồm Số Học, cũng đều có những câu hỏi bất khả giải định bằng lập luận trùng ngôn trong hệ thống đó. Đặc biệt, bao giờ chúng ta cũng có câu hỏi trên: chính hệ thống đó có mâu thuẫn hay không? Một câu hỏi bất khả giải định: Thế nào là Siêu Toán và Bất khả giải định tính? (Meta-mathematics and Undeccidability). Đối với D.Hilbert, Siêu Toán tức là phản tỉnh suy nghĩ lại về Toán Học và "Thế nào là chứng minh trong Toán Học" (the theory of proof). Thật ra, nó không khác gì Hình Nhi Thượng Học (Meta-phisics) trong triết học: đứng cao và xa ra ngoài Toán Học để nhìn về tìm hiểu thế nào là Toán Học và Lý Luận trong Toán Học! Nhưng Toán gia lại không quá siêu hình, vì tất cả những lập luận logic liên hạn trong một hệ thống Toán Axiomatic, như Số Học, đều có thể hình thức hóa (formalized): như những chương trình - những algorithms - của một máy điện tử Turing, như những con số - số Godel - sau khi đã số học hóa lập luận logic trong Số Học. Vậy đối với D.Hilbert, đặt một câu hỏi siêu toán, trước hết là tự hỏi câu hỏi đó có thật là một Công Thức (formula) trong hệ thống Toán Axiomatic mà ta đang suy xét không. (Tỉ dụ, câu của Công Tôn Long: Con ngựa trắng này không phải là con ngựa trắng? rõ ràng không phải là một Công Thức của Số Học). Khi đã rõ là một Công Thức rồi thì ta mới đặt vấn đề chứng minh nó đúng hay sai. Chứng minh nó đúng, nghĩa là ta có thể liên hạn suy luận nó ra từ những tiền đề của hệ thống Toán Axiomatic, mà ta đang suy xét. Bất Khả Giải Định là khi ta không thể chứng minh rằng nó đúng, cũng không thể chứng minh rằng nó sai. Để trả lời câu hỏi của Hilbert, Godel cũng đã nhận định như vậy. Trước hết, Godel xác nhận rằng câu hỏi siêu toán về Tính Nhất Quán của Số Học (the consistency of arithmetics) là tương đương với công thức sau đây:

Công thức A: Công thức A là một công thức không chứng minh ra được. Công thức A chỉ là những từ ngữ! Tất cả cái khó khăn, tế nhị sâu xa là xác nhận nó là câu nói giải thích bằng lời một công thức trong lập luận logic của số học, nghĩa là nó có một con số - số Godel - trong Số Học Hóa Lập Luận Logic của Số Học (sách tham lhảo: Godel's Proof - E.Nagel and J.R.Newamn, New York University Press). Một khi đã xác nhận như vậy rồi thì sự Bất Khả Giải Định của câu hỏi về Tính Nhất Quán của Số Học là hiển nhiên. Công thức A không khác gì nghịch lý luận đề của Epimenides (the Liar Paradox): Tôi nói dối. Công thức A tự nó nói: nó là sai! Ta chứng minh được công thức A hay không chứng minh được, chúng ta đều rơi vào vòng luẩn quẩn mâu thuẫn.

Công thức A trên dù sao vẫn rất trừu tượng, không nói thẳng được vào những suy nghĩ thông thường, "chân phương" của toán gia. Ngay nhà triết học Wittgenstein, chuyên môn về triết lý trong Toán Học, cũng đặt ra câu hỏi về sự hiện hữu khách quan của nó. Để hiểu thêm về Bất Khả Giải Định Tính, tôi xin đưa ra ba tỉ dụ sau đây, và cũng để nói rõ chúng ta phải hiểu thế nào là một hệ thống toán axiomatic bao gồm Số Học:

Thí dụ 1. Định lý cuối cùng của Fermat (the last theorem of Fermat)

Trong tập hợp của những số tự nhiên, N = {1,2,3,4...}, không có ba con số x,y,z nào mà $x^3 + y^3 = z^3$

Fermat công bố định lý trên, nhưng năm trăm sau Fermat, người ta không biết làm sao chứng minh nó. Đó là câu hỏi bất khả giải định không? Không! vì trong năm 1995, toán gia người Anh, A.Wiles đã chứng minh nó, trong một công trình đồ sộ mà các toán gia vẫn còn suy xét, mà muốn hiểu, chắc chắn chúng ta phải cần biết một phần rất lớn những điều chính yếu của Toán Học hiện nay!

Thí dụ 2. Giả thiết Goldbach (the conjecture of Goldbach)

Bất cứ con số tự nhiên chẵn nào cũng là tổng số của hai số nguyên tố (prime numbers); $2n = p + q$, p và q là số nguyên tố.

Điều đó đúng hay là sai? Đó là một sự thật khách quan hiện hữu mà chúng ta không biết được trong giờ phút này. Chúng ta có thể viết một chương trình cho máy điện tử lần lượt phân những số chẵn: 2,4,6,... ra làm tổng số của hai số nguyên tố. Máy có thể chạy mãi để đi tìm ra thấy một số chẵn không phải là tổng số của hai số nguyên tố! Hiện giờ đây, chúng ta có thể coi giả thiết Goldbach như là bất khả giả định trong lập luận của Số Học. Và như vậy, chúng ta có thể chấp nhận một hệ thống toán Axiomatic mới, bao gồm số học, nghĩa là chúng ta vẫn có tập hợp N, với những tiền đề của Peano, nhưng lại thêm một tiền đề mới nữa: giả thiết Goldbach. Tất cả những định lý của Số Học đều là định lý của hệ thống toán Axiomatic mới này; nhưng ta cũng thể có những định lý mới, đặc biệt, giả thiết Goldbach là tiền đề, thì cũng là một định lý mới. Rồi từ hệ thống toán Axiomatic mới này, ta cũng lại xây dựng những lâu đài. Những lâu đài này có thể xụp đổ nếu trong "một triệu năm nữa", máy điện tử trên bỗng thấy một số chẵn không phải là tổng số của hai số nguyên tố!

Thí dụ 3. Tiền đề của Biến Hàm Chọn (the axiom of choice)

Gọi R là tập hợp của những số thiệt

Gọi P (R) là tập hợp của những phần hợp của R

Có một Biến Hàm Chọn:

$$f: P(R) \to R$$

$$A \to f(A) \in A$$

nghĩa là số thiệt f(A) nằm trong phần hợp A của R.

Biến hàm chọn f chọn từ bất cứ một tập hợp số thiệt A nào một số thiệt nằm trong tập hợp A đó. Vấn đề ở đây là chúng ta có thể chọn nhặt một cách vô cùng, vô tận không? Tập hợp R của những số thiệt là một liên tục - một continuum - những điểm trên một đường thẳng - một tập hợp lớn vô cùng, không đếm được (uncountable). Tập hợp P(R) của những phần hợp của R lại lớn vô cùng, vô tận nữa (định lý của Cantor). nên biến hàm chọn f, tức là biết chọn nhặt một cách vô cùng, vô tận, thật rõ ràng là đều chúng ta liên hạn lý luận không thể giải định được. Thật vậy, chính Godel cũng đã chứng minh rằng: "có hay không một biến hàm chọn f?" là câu hỏi bất khả giải định trong liên hạn lập luận của Số Học. Và ở đây, vì đã là điều bất khả giả định, ta có một hệ thống toán Axiomatic mới, bao gồm Số Học, với những tiền đề của Peano, nhưng cộng thêm Tiền Đề của Biến Hàm Chọn. Tất cả những định lý của Số Học đều là định lý của hệ thống toán Axiomatic mới này. Nhưng đặc biệt, ở trong hệ thống này, ta có một định lý mới: Định lý Gentzen: "chúng ta có thể chứng minh trong hệ thống này rằng: Số Học không có mâu thuẫn". Dĩ nhiên, chính hệ thống toán Axiomatic mới này tự nó và riêng nó có mâu thuẫn hay không, là điều bất khả giả định (định lý II của Godel).

Ba tỉ dụ trên tương đối cho chúng ta hiểu cái sâu xa, cái tế nhị trong khái niệm của chúng ta về sự bất khả giải định. Hai tỉ dụ đầu - định lý của Fermat, giả thiết Goldbach - là nói về một sự thật khách quan hiện hữu, mà ta không đạt được, rồi sau đạt được và cũng có thể sẽ không bao giờ đạt được! Trái lại "có hay không một biến hàm chọn f trên tập hợp P(R), lớn vô cùng, vô tận" là đều chắc chyắn trong cái hữu hạn của chúng ta, chúng ta không thể giải định được!

Nhưng chính sự xác nhận Tiền Đề của Biến Hàm Chọn không thể giải định được, đã là một định lý, một phản tỉnh suy luận sâu xa của logic luận học. Và cũng để trên cơ sở đó, chúng ta có một hệ thống toán Axiomatic sâu rộng hơn bao gồm cả Số Học.

KẾT LUẬN:
QUAN NIỆM PLATO VỀ SỰ THẬT

Trong cái hỗn mang của tất cả, vẫn nhận ra những nguyên lý căn bản, đó là ước mộng của con người, đó là cái hoài bão siêu việt của con người. Con người đã xây dựng trong tư tưởng cả một lâu đài suy luận: Toán Học, với những khái niệm mỗi ngày một phong phú, tân tiến thêm xa. Nhờ Toán Học, chúng ta thoát khỏi cái huyền mặc dị hoảng sơ thủy về vũ trụ. Nhờ Toán Học, chúng ta biết nhìn vào thiên nhiên, sự sống hồng hoang bí quẩn một cách đơn thuần, giản dị, tinh vi. Tất cả những thành tựu khoa học kỹ thuật, mà chúng ta biết ngày nay là nhờ qua những suy luận Toán Học: Toán Học thực dụng (Applied Mathematics). Ngay cuộc canh tân bằng máy điện tử trong suy luận, trong cách sống của chúng ta ở cuối thế kỷ 20 này, chính yếu là nhờ những công trình của những Logic luận gia như Turing, Church, Von Neumann...

Nhưng toán học có phải là sáng tạo của con người không? Nếu chỉ là nhân tạo, sao thích ứng với sự tìm hiểu thiên nhiên của chúng ta như vậy! Chắc chắn, Toán Học không phải là một trò chơi nhân tạo lý trí. Theo H.Poincaré, trong Toán Học là những Thật Sự Khách Quan Hiện Hữu. Cũng như trong vũ trụ thiên nhiên vật chất có những sự thật khách quan hiện hữu, những luật vật lý của thiên nhiên: người có sống có chết, quả địa cầu không phải là trung tâm của vũ trụ... Có lẽ, chúng ta phải hiểu như Plato khi nói về sự thật, có những sự thật của thiên nhiên vật chất và có những sự thật của tư tưởng. Và chính Plato chắc không nói gì khác đây: chúng ta đi tìm hiểu Toán Học là chúng ta đi tìm đường trở về "cố quận" của tâm tư. Tôi muốn nói: tất cả đều có hai mặt, phản ảnh lẫn nhau, có vũ trụ thiên nhiên vật chất bên ngoài, thì cũng có vũ trụ tư tưởng bên trong. Những sự thật của Toán Học là những sự thật khách quan hiện hữu của vũ trụ cũng vô cùng, vô tận mà chúng ta ai cũng mang trong tâm khảm.

Nói vậy, tôi muốn nhấn mạnh một điều rằng con người - toán gia cũng như khoa học gia - ai cũng cần phải biết khiêm tốn trước cái vô tận huyền bí của vũ trụ thiên nhiên, tư tưởng. Chúng ta biết đấy nhưng bao nhiêu điều chúng ta không biết được. Đó là triết lý của hai định lý của Godel: cái khiêm tốn đó là vấn đề đạo đức cần thiết hơn bao giờ hết trong thế giới văn minh chúng ta hiện tại. Khoa học kỹ thuật giúp chúng ta thực hiện quá nhiều điều. Những máy điện tử giúp chúng ta tính toán, suy luận rộng và nhanh. Nhưng biết nhiều, làm sao biết đến căn nguyên. Kỹ xảo tân tiến, nhưng mãi mãi vẫn là mù quáng một chiều. Nên tân tiến, biết nhiều đó cũng có thể tiềm tàng những nguy cơ. Trong khoa học tự nhiên, đó là điều quá dễ hiểu, chúng ta ai cũng biết sợ cái nguy cơ tàn phá thế giới trong những thành tựu của khoa học kỹ thuật.

Hai định lý của Godel thật ra gián tiếp nói về cái hư vô diệu hữu của con người, cái khả năng ra khỏi cái bản thể tức thời, luẩn quẩn lập luận một hai, để xác nhận thấy rằng có một sự thật xa xôi nào đó không đạt được. Như người họa sĩ vẫn vẽ những bức tranh để nói về một cái đẹp, vẫn biết rằng cái đẹp - dù là chủ quan - chỉ là một lý tưởng xa vời. Cái tuyệt vời là toán gia, khoa học gia, nghệ sĩ trong khi suy luận tìm hiểu, trong khi sáng tác, họ như hé thấy tất cả một vũ trụ vô cùng, ở ngoài cái thế giới tầm thường của chúng ta mỗi ngày. Người Thiền Đạo chẳng nói tới sao một thế giới tuyệt mỹ mà họ linh cảm thấy trong những phút giây thiền định? Cái vũ trụ đó, cái thế giới đó có phải chăng đều là một "cố quận", một "thiên đàng đã mất" của loài người? Đó là điều bất khả giải định!